

## Révisions & Oraux ; Série N°4

**Exercice 1** Donner le  $DL_6(0)$  de  $\cosh$ ,  $\sin$  et  $x \mapsto \sqrt{1-x^3}$ , et le  $DL_2(1)$  de  $\sqrt{1-x^3}$

**Exercice 2** [CCP MP] Soit  $n \geq 2$  et  $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

1. Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , module et argument de  $z^k - 1$ .
2. Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1| = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ .

**Exercice 3** [CENTRALE PSI] Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $T(f)(0) = f(0)$  et pour  $0 < x \leq 1$ ,  $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif? surjectif?
2. Soient  $f, g \in E$ . On pose  $F: x \mapsto x \int_0^x f(t)g(t) dt - \int_0^x f(t) dt \int_0^x g(t) dt$ .
  - a) Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et écrire  $F'$  sous la forme d'une intégrale.
  - b) Montrer que si  $f, g$  sont monotones de même sens de variation, alors  $T(fg) \geq T(f)T(g)$ .

**Exercice 4** [IMT MP] Soit  $A = (\sin(i+j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . En considérant  $X = (\cos(i))_{1 \leq i \leq n}$  et  $Y = (\sin(i))$ , calculer rang  $A$  et  $\det A$ .

**Exercice 5** [CCP MP] Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ .

1. Montrer que  $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{\vec{0}\}$ .
2. Soit  $r = p + q - p \circ q$ . Montrer que  $r$  est un projecteur sur  $\text{Im } p + \text{Im } q$  parallèlement à  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ .

**Exercice 6** Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires d'images finies dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $E(X^k) = E(Y^k)$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  suivent la même loi.

**Exercice 7** [MINES MP 2024] Soit  $\alpha = e^{i\theta}$  un nombre complexe de module 1. Calculer  $\prod_{k=0}^n (\alpha^{2^k} + \bar{\alpha}^{2^k})$ .

**Exercice 8** [CENTRALE MP 2024] 1. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $f$  admet un extremum en  $a \in \mathbb{R}^n$ . Rappeler la valeur de  $\nabla f(a)$  (avec démonstration).

2. Soit  $\theta \in [0, \pi]$ . Soient  $A$  et  $B$  du cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $(\widehat{OA, OB}) = \theta$ . Exprimer l'aire de la lunule constituée des points extérieurs au disque unité et intérieurs au disque de diamètre  $[AB]$ .
3. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du cercle unité tels que les trois angles  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ,  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  et  $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$  soient dans  $[0, \pi]$ . Maximiser la somme des aires des trois lunules qu'ils définissent.

**Exercice 9** [ENS MP 2024] 1. Montrer que toute rotation du plan est composée de deux symétries axiales.

2. Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide  $X$  est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de  $X$ .
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si  $X$  est infini?

**Exercice 10** [ENS MP 2024] On étend naturellement la valuation 2-adique  $v_2$  à  $\mathbb{Q}^*$ . Calculer  $v_2(H_n)$ , où  $H_n$  est la série harmonique.

## Révisions & Oraux ; Série N°4

**Exercice 1** Donner le  $DL_6(0)$  de  $\cosh$ ,  $\sin$  et  $x \mapsto \sqrt{1-x^3}$ , et le  $DL_2(1)$  de  $\sqrt{1-x^3}$

**Exercice 2** [CCP MP] Soit  $n \geq 2$  et  $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

1. Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , module et argument de  $z^k - 1$ .
2. Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1| = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ .

**Exercice 3** [CENTRALE PSI] Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $T(f)(0) = f(0)$  et pour  $0 < x \leq 1$ ,  $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif? surjectif?
2. Soient  $f, g \in E$ . On pose  $F: x \mapsto x \int_0^x f(t)g(t) dt - \int_0^x f(t) dt \int_0^x g(t) dt$ .
  - a) Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et écrire  $F'$  sous la forme d'une intégrale.
  - b) Montrer que si  $f, g$  sont monotones de même sens de variation, alors  $T(fg) \geq T(f)T(g)$ .

**Exercice 4** [IMT MP] Soit  $A = (\sin(i+j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . En considérant  $X = (\cos(i))_{1 \leq i \leq n}$  et  $Y = (\sin(i))$ , calculer rang  $A$  et  $\det A$ .

**Exercice 5** [CCP MP] Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ .

1. Montrer que  $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{\vec{0}\}$ .
2. Soit  $r = p + q - p \circ q$ . Montrer que  $r$  est un projecteur sur  $\text{Im } p + \text{Im } q$  parallèlement à  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ .

**Exercice 6** Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires d'images finies dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $E(X^k) = E(Y^k)$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  suivent la même loi.

**Exercice 7** [MINES MP 2024] Soit  $\alpha = e^{i\theta}$  un nombre complexe de module 1. Calculer  $\prod_{k=0}^n (\alpha^{2^k} + \bar{\alpha}^{2^k})$ .

**Exercice 8** [CENTRALE MP 2024] 1. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $f$  admet un extremum en  $a \in \mathbb{R}^n$ . Rappeler la valeur de  $\nabla f(a)$  (avec démonstration).

2. Soit  $\theta \in [0, \pi]$ . Soient  $A$  et  $B$  du cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $(\widehat{OA, OB}) = \theta$ . Exprimer l'aire de la lunule constituée des points extérieurs au disque unité et intérieurs au disque de diamètre  $[AB]$ .
3. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du cercle unité tels que les trois angles  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ,  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  et  $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$  soient dans  $[0, \pi]$ . Maximiser la somme des aires des trois lunules qu'ils définissent.

**Exercice 9** [ENS MP 2024] 1. Montrer que toute rotation du plan est composée de deux symétries axiales.

2. Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide  $X$  est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de  $X$ .
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si  $X$  est infini?

**Exercice 10** [ENS MP 2024] On étend naturellement la valuation 2-adique  $v_2$  à  $\mathbb{Q}^*$ . Calculer  $v_2(H_n)$ , où  $H_n$  est la série harmonique.